

Produit tensoriel

Henen Maouche

Encadreur : N. Midoune

01 juillet 2019

- Introduction

- Introduction
- Le produit tensoriel d'un κ -espace vectoriel

- Introduction
- Le produit tensoriel d'un κ -espace vectoriel
- Produit extérieur d'un κ - espace vectoriel

- Introduction
- Le produit tensoriel d'un κ -espace vectoriel
- Produit extérieur d'un κ - espace vectoriel
- Conclusion

Introduction

En 1900, Ricci et Levi-Civita ont donné le premier exposé systématique relatif au calcul tensoriel. Dans cet ouvrage, les auteurs ont attiré l'attention des mathématiciens et des physiciens sur un certain nombre d'applications de cette théorie mathématique. Depuis, l'apparition de la théorie de la relativité, qui n'a été possible que grâce à l'existence préalable du calcul tensoriel, lui a fait réaliser par contre coup d'immenses progrès. Ce calcul est devenu l'un des instruments essentiels de toute la physique théorique moderne.

L'étude du calcul tensoriel peut être réalisée au sein d'un cadre mathématique formel, à l'aide de définitions et de démonstrations plus ou moins compliquées. Mais le calcul tensoriel est aussi un outil très pratique pour l'écriture et l'étude des équations servant à décrire des phénomènes physiques. En effet, les lois physiques ne sont valables que si elles sont indépendantes de tout système de coordonnées particulier utilisé pour les représenter mathématiquement. Il est ainsi très commode d'utiliser l'analyse tensorielle en relativité générale, en géométrie différentielle, en mécanique, en thermodynamique, et dans de nombreuses autres branches de la science ou de la technologie, et il n'est pas nécessaire pour cela de connaître l'ensemble des fondements mathématiques de la théorie.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de produit tensoriel : définitions et propriétés, ainsi que le produit extérieur.

Ce travail est composé de deux chapitres : dans le premier chapitre, nous rappelons les notions de base concernant la construction du produit tensoriel, (nous donnons quelques exemples d'applications).

Dans le deuxième chapitre : on s'intéresse au produit extérieur qui est très liée au produit tensoriel.

On termine ce mémoire par une conclusion.

Le produit tensoriel d'un k -espace vectoriel

Problème de factorisation des applications bilinéaires

Soient K un corps commutatif et M, N, R des K -espaces vectoriels.

On regarde les applications K -bilinéaires φ de $M \times N$ vers R , i.e., qui vérifient

$$\begin{cases} \varphi(am, n) &= \varphi(m, an) = a\varphi(m, n) \\ \varphi(m + m', n) &= \varphi(m, n) + \varphi(m', n) \\ \varphi(m, n + n') &= \varphi(m, n) + \varphi(m, n') \end{cases}$$

On note $Bil_K(M, N, R)$ ou $Bil(M, N, R)$ l'ensemble des applications K -bilinéaires de $M \times N$ dans R , et $\mathcal{L}(M, N)$ les homomorphismes de K -espace vectoriel de M dans N , i.e., les applications K -linéaires de M dans N .

Nous allons représenter linéairement les applications bilinéaires.
 Pour se faire, étant donnés deux espaces vectoriels M et N , nous allons construire un espace vectoriel P (dépendant de M et N) de façon à pouvoir identifier $\text{Bil}(M, N, \cdot)$ et $\mathcal{L}(P, \cdot)$ pour tout espace vectoriel. Plus précisément, on s'intéresse au problème suivant : étant donnés M et N , trouver un K -espace vectoriel P est une application K -bilinéaire.
 $\pi: M \times N \longrightarrow P$ telle que, pour tout K -espace vectoriel R et pour toute application K -bilinéaire
 $\varphi: M \times N \longrightarrow R$, il existe une unique application K -linéaire
 $\bar{\varphi}: P \longrightarrow R$ telle que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\varphi} & \\ P & & \end{array}$$

Le procédé $\varphi \longmapsto \bar{\varphi}$ donnera l'application linéaire
 $\text{Bil}(M, N, R) \longrightarrow \mathcal{L}(P, R)$ cherchée.

Observons déjà que, si un tel couple (P, π) existe, alors P est unique à isomorphisme près.

Construction

Soit E le K -espace vectoriel de base $M \times N$, i.e., l'ensemble des combinaisons formelles $\sum \lambda_{m,n} (m, n)$ à support fini.

Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par les

$$\begin{aligned}(m + m', n) - (m, n) - (m', n) \\ (m, n + n') - (m, n) - (m, n') \\ (am, n) - a(m, n) \\ (m, an) - a(m, n)\end{aligned}$$

et considérons le K -espace vectoriel quotient E / F .

En notant $\bar{\xi}$ la classe d'un élément ξ .

La projection canonique

$$\pi : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow E / F \\ (m, n) & \longmapsto \overline{(m, n)} \end{cases}$$

est donc une application bilinéaire.

On notera

$$E / F = M \underset{K}{\otimes} N \text{ ou } M \otimes_K N$$

ce que l'on prononce « M tensoriel N » ou « M tenseur N », et on l'appellera le **produit tensoriel** de M par N .

Noter que, en tant que K -espace vectoriel, le produit tensoriel

$$M \otimes_K N = \pi(E) = \pi(\prec M \times N \succ) = \prec \pi(M \times N) \succ$$

est engendré par les

$$\pi(m, n) = \overline{(m, n)}$$

On notra désormais

$$\overline{(m, n)} = m \otimes_K n \text{ ou } m \otimes n$$

pour ces générateurs, que l'on appellera également tenseurs purs.

Puisque $\pi : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \\ (m, n) & \longmapsto & m \otimes n \end{cases}$ est bilinéaire, on a immédiatement les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (m + m') \otimes n = (m \otimes n) + (m' \otimes n) \\ m \otimes (n + n') = (m \otimes n) + (m \otimes n') \\ (am) \otimes n = m \otimes (an) = a(m \otimes n) \end{cases}$$

On en déduit $0_M \otimes n = (0_K m) \otimes n = 0_K (m \otimes n) = 0$, i.e.

$$0 \otimes n = m \otimes 0 = 0.$$

Si l'on reprend le problème que l'on s'était posé en début de chapitre, étant donnée une application bilinéaire.

$$\varphi : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow R \\ (m, n) & \longmapsto \varphi(m, n) \end{cases}$$

on a bien une unique application linéaire

$$\overline{\varphi} : \begin{cases} M \otimes N & \longrightarrow R \\ m \otimes n & \longmapsto \varphi(m, n) \end{cases}$$

i.e., telle que $\overline{\varphi} \circ \pi(m, n) = \varphi(m, n)$ pour tout (m, n) de $M \times N$.

L'unicité de $\bar{\varphi}$ vient de sa linéarité et de ce que les $m \otimes n$ engendrent $M \otimes N$, le point important est surtout son existence.

C'est ce que l'on appelle la **propriété universelle du produit tensoriel**.

On dit aussi que φ se factorise en $\bar{\varphi} \circ \pi$:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\varphi} & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

On remarquera de plus que le produit tensoriel ne dépend que de la structure des espaces vectoriels considérés, en cela que :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \cong M' \\ N \cong N' \end{array} \right\} \implies M \otimes N \cong M' \otimes N'$$

D'autre part, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(M \otimes N, R) & \longrightarrow Bil(M, N; R) \\ \Phi & \longmapsto (m, n) \mapsto \Phi(m \otimes n) \end{array} \right.$$

est bien définie, linéaire, injective (la connaissance des images par Φ des éléments de la base $m \otimes n$ de $M \otimes N$ détermine uniquement Φ), et surjective ($Bil(M, N; R)$ a un antécédent $\bar{\varphi}$), donc est un isomorphisme. Enfin, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(M, \mathcal{L}(N, R)) & \longrightarrow Bil(M, N; R) \\ \Phi & \longmapsto (m, n) \mapsto [\Phi(m)](n) \end{array} \right.$$

est bien définie, linéaire, injective, surjective (tout φ de $Bil(M, N; R)$ a un antécédent $m \mapsto \varphi(m, \cdot)$), donc est un isomorphisme.

On en conclut que

$$\mathcal{L}(M \otimes N, R) \cong Bil(M, N; R) \cong \mathcal{L}(M, \mathcal{L}(N, R))$$

Propriétés

(commutativité, associativité et élément neutre pour le produit tensoriel)

Soient M, N, R des K -espaces vectoriels.

1) Les K -espaces vectoriels $M \otimes N$ et $N \otimes M$ sont canoniquement identifiables via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} M \otimes N & \xrightarrow{\sim} & N \otimes M \\ m \otimes n & \mapsto & n \otimes m \end{array}$$

2) Les K -espaces vectoriels $(M \otimes N) \otimes R$ et $M \otimes (N \otimes R)$ sont canoniquement identifiés via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes N) \otimes R & \xrightarrow{\sim} & M \otimes (N \otimes R) \\ (m \otimes n) \otimes p & \mapsto & m \otimes (n \otimes p) \end{array}$$

3) Les K -espaces vectoriels M , $M \otimes K$ et $K \otimes M$ sont canoniquement identifiés via les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & M \otimes K \\ m & \mapsto & m \otimes 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & K \otimes M \\ m & \mapsto & 1 \otimes m \end{array}$$

Produit tensoriel d'applications linéaires

Définition

Soient M, N, M', N' des espaces vectoriels, et $\left\{ \begin{array}{l} f : M \longrightarrow M' \\ g : N \longrightarrow N' \end{array} \right.$ des applications linéaires.

On appelle produit tensoriel de f et g l'unique application linéaire

$$f \otimes g : \left\{ \begin{array}{ll} M \otimes N & \longrightarrow \\ m \otimes n & \longmapsto f(m) \otimes g(n) \end{array} \right. \quad M' \otimes N'$$

Distributivité du produit tensoriel sur les sommes directes

Soient $(M_i)_{i \in I}$ et $(N_j)_{j \in J}$ deux familles de K -espaces vectoriels.

$$\text{On pose } \begin{cases} M &= \prod_{i \in I} M_i \\ N &= \prod_{j \in J} N_j \end{cases}$$

On peut former le produit cartésien $\prod_{i,j} (M_i \otimes N_j)$.

On dispose via la propriété universelle d'une application K -linéaire.

$$\Pi: \begin{cases} M \otimes N & \longrightarrow \prod_{i,j} M_i \otimes N_j \\ (x_i) \otimes (y_j) & \longmapsto (x_i \otimes y_j) \end{cases}$$

Corollaire

Soient M et N deux K -espaces vectoriels.

1) Si $(f_j)_{j \in J}$ une base de N , alors tout élément de $M \otimes N$ s'écrit de façon unique

$$\sum_{j \in J}^{finie} m_j \otimes f_j$$

$M \otimes N$ se comporte ainsi comme un M -espace vectoriel.

2) Si de plus (e_i) une base de M , alors $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ une base de $M \otimes N$, et

$$\dim (M \otimes N) = \dim (M) \dim (N)$$

Produit tensoriel des matrices

Intéressons-nous maintenant à l'effet du produit tensoriel sur les matrices.

Proposition

Soient M, N deux K -espaces vectoriels de bases $B = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$, $B' = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ de dimension m, n respectivement.

$\begin{cases} f \in \mathcal{L}(M) \\ g \in \mathcal{L}(N) \end{cases}$ deux endomorphismes et

$$\begin{cases} X = \text{Mat}_{(e_i)} f = (a_{i,j}) \\ Y = \text{Mat}_{(f_j)} g = (b_{i,j}) \end{cases}$$

a) Si on ordonne lexicographiquement la base canonique de $M \otimes N$ en

$$e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_n,$$

$$e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_n,$$

...

$$e_m \otimes f_1, e_m \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_n,$$

on a alors, dans cette base :

$$\text{Mat} (f \otimes g) = \begin{pmatrix} a_{1,1}Y & \cdots & a_{1,m}Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}Y & \cdots & a_{m,m}Y \end{pmatrix}$$

on part de la matrice X , et on multiplie chacun de ses coefficients par Y

b) Si on ordonne anti-lexicographiquement la base canonique de $M \otimes N$ en

$$\begin{aligned} &e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_1, \dots, e_m \otimes f_1, \\ &e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_2, \\ &\dots \\ &e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_n, \dots, e_m \otimes f_n, \end{aligned}$$

on a alors, dans cette base :

$$\text{Mat} (f \otimes g) = \begin{pmatrix} b_{1,1}X & \cdots & b_{1,n}X \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}X & \cdots & b_{n,n}X \end{pmatrix}$$

on part de la matrice Y , et on multiplie chacun de ses coefficients par X .

Corollaire

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} (f \otimes g) &= \operatorname{tr}(f) \operatorname{tr}(g) \\ \det (f \otimes g) &= \det (f)^{\operatorname{rg} N} \det (g)^{\operatorname{rg} M} . \end{aligned}$$

1) Produit tensoriel de deux vecteurs :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{Tr}(\vec{u} \otimes \vec{v}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

2) Produit tensoriel de deux matrices :

a) Soient A et B deux matrices carrées d'ordres 2, telles que.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 1 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \\ 1 \times 2 & 1 \times 4 & 2 \times 2 & 2 \times 4 \\ 3 \times 1 & 3 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ 3 \times 2 & 3 \times 4 & 1 \times 2 & 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 12 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Soient C et H deux matrices telles que

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C \otimes H = \begin{matrix} & 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & & & \\ 0 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & & & \\ 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

3) Base de produit tensoriel :

a) $E \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de base $B = \{e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1\}$,
telle que $\dim E = n$ et de base $B' = (e_1, \dots, e_n)$.

b) $\dim V = 2$, $B = (e_1, e_2)$.

Une base de $\otimes^2 V = V \otimes V$, est donnée par :

$e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$.

$\dim \otimes^2 V = 2 \times 2 = 4$.

c) Une base de $\otimes^3 V = V \otimes V \otimes V$, est donnée par :

$e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_1 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \otimes e_2$

$\dim \otimes^3 V = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

4) Algèbre des quaternions

On appelle algèbre des quaternions, et on note \mathbb{H} , l'algèbre (associative mais non commutative) de dimension 4 sur \mathbb{R} engendrée par les trois éléments i, j, k soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (on vérifiera que ces relations donnent bien une algèbre de dimension 4), alors $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

D'abord \mathbb{H} a bien la dimension annoncée : elle a une base comme \mathbb{R} -espace vectoriel formée des quatre éléments $1, i, j, k$ puisque tout produit de deux tels éléments s'exprime comme combinaison des autres (par exemple $ij = k$ car $ij = -ij (k^2) = -(ijk) k = k$). Ensuite, on vérifie facilement que

$(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, ce qui montre que tout quaternion $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ non nul admet un inverse (à savoir $\frac{1}{N}(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k)$ où $N = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ vérifie $N \neq 0$ dans \mathbb{R}), donc \mathbb{H} est bien une algèbre à divisions.

Le produit tensoriel $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est engendré par les mêmes générateurs et relations, sur \mathbb{C} cette fois. Montrons donc qu'on peut trouver trois matrices $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\sigma_i^2 = \sigma_j^2 = \sigma_k^2 = \sigma_i \sigma_j \sigma_k = -1$ et qui engendrent $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'algèbre (pour cela, il suffit bien sûr qu'avec l'identité elles l'engendrent en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel). On prend

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_k = \sigma_i \sigma_j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et on a bien les relations souhaitées, comme on le vérifie immédiatement.

5)

5.1) Soit B une K -algèbre, si $B \neq 0$, alors $B \otimes_K B \neq 0$.

L'application K -bilinéaire φ :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & B \times B & \longrightarrow & B \\ & (x, y) & \longrightarrow & xy = \varphi(x, y) \end{array}$$

définit une application linéaire $\overline{\varphi}$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\varphi} : & B \otimes B & \longrightarrow & B \\ & x \otimes y & \longrightarrow & \overline{\varphi}(x \otimes y) = \varphi(x, y) = xy \end{array}$$

or $\overline{\varphi}(1 \otimes 1) = \varphi(1, 1) = 1 \in B \neq 0 \implies B \otimes_K B \neq 0$.

5.2)

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$z \otimes 1 \longrightarrow (z, z)$$

$$z \otimes i \longrightarrow (zi, -zi)$$

$$z \otimes z' \longrightarrow (zz', z\overline{z'})$$

l'application $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ est bilinéaire, qui définit une application linéaire $\overline{\varphi} :$

$$\overline{\varphi} : \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \quad \text{bijective}$$

$$(z, z') \longrightarrow \overline{\varphi}(z, z') = \varphi(z, z')$$

5.3)

$$\begin{aligned} E^* \otimes F &\cong \mathcal{L}(E, F) \\ f \otimes y &\longrightarrow x \mapsto f(x)y \\ E^* \otimes F^* &\cong \left(E \otimes_K F \right)^* \\ f \otimes g &\longrightarrow x \otimes y \mapsto f(x)g(y) \end{aligned}$$

5.4)

$$\begin{aligned} \text{End}(E) \otimes_K \text{End}(F) &\cong \text{End}(E \otimes F) \\ f \otimes g &\longrightarrow x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y) \end{aligned}$$

5.5) Soit E et F deux espaces vectoriels sur K .

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & F \otimes E \\ (x, y) & \longrightarrow & \varphi(x, y) = y \otimes x \end{array}$ est bilinéaire, qui définit une application linéaire

$$\phi : \begin{array}{ccc} E \otimes F & \longrightarrow & F \otimes E \\ x \otimes y & \longrightarrow & \phi(x \otimes y) = y \otimes x = \varphi(x, y) \end{array}$$

ϕ est bijectif car involutif : $\phi \circ \phi = id$ i.e, $\phi^{-1} = \phi$.

D'où $E \otimes F \cong F \otimes E$.

6) Tout groupe commutatif G est un \mathbb{Z} -module.

- $(G, +)$ est un groupe commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times G & \longrightarrow & G \\ (\alpha, x) & \longrightarrow & \underbrace{x + x + \cdots + x}_{\alpha \text{ fois}} \end{array}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x.$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

$$1 \cdot x = x.$$

On considère les \mathbb{Z} -modules $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, alors :

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}$$

où $a \wedge b = \text{p.g.c.d.}(a, b)$.

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z} \\ (\bar{n}_a, \bar{m}_b) & \longrightarrow & \overline{nm}_{a \wedge b} \end{array}$ est bilinéaire,
qui définit une application linéaire

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z} \\ \bar{n}_a \otimes \bar{m}_b & \longrightarrow & \overline{nm}_{a \wedge b} \end{array}$$

ϕ est bijectif car $\phi(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \bar{1}$.

D'où $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}$.

Remarque :

Si $a \wedge b = 1$ i.e., a et b sont premiers entre eux

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{\bar{0}\} = 0.$$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \cong 0, \text{ car } 3 \wedge 11 = 1.$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ car } 2 \wedge 2 = 2.$$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \text{ car } 3 \wedge 6 = 3.$$

Produit extérieur d'un K -espace vectoriel

Lien avec les applications multilinéaires alternées

Voyons à présent comment représenter linéairement les applications multilinéaires alternées.

Définition

Une forme n -linéaire $\varphi : M^n \longrightarrow K$ est dite alternée si

$$\varphi(\dots, m, \dots, m, \dots) = 0$$

On notera $\mathcal{L}K_n(M, K)$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées.

Proposition

Si φ est n -linéaire alternée, alors

$$\varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -\varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$$

Corollaire

Si φ est n -linéaire alternée, alors

$$\varphi \left(m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(n)} \right) = \varepsilon(\sigma) \varphi(m_1, \dots, m_n), \text{ où } \sigma \in S_n.$$

Définition

Soit M un K -espace vectoriel. Pour chaque entier r , posons

$$T^r(M) = \bigotimes_{i=1}^r M, \quad T^0(M) = K, \quad T^1(M) = M \text{ et } T^2(M) = M \otimes M.$$

$T^r(M) = M \otimes \dots \otimes M$ (le produit tensoriel r fois).

Le produit tensoriel étant associatif, on obtient une application bilinéaire

$$T^r(M) \times T^s(M) \longrightarrow T^{r+s}(M)$$

qui associative.

On peut ainsi, par de cette application bilinéaire, définir une structure de corp sur la somme directe

$$T(M) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(M) = K \otimes M \oplus M \otimes M \oplus \dots$$

et même une structure d'algèbre (en identifiant K à $T^0(M)$).

On appelle $T(M)$ l'algèbre tensorielle de M sur K .

Pour $x, y \in T(M)$, on notera encore $x \otimes y$ la multiplication d'anneau de $T(M)$.

Une application linéaire $f : M \longrightarrow F$ induit, pour tout $r \geq 0$, une application linéaire

$$T^r(f) : T^r(M) \longrightarrow T^r(F)$$

qui à son tour induit une application sur $T(M)$, notée $T(f)$. Il est clair que $T(f)$ est l'unique application linéaire telle que, pour $x_1, \dots, x_r \in M$, on ait

$$T(f)(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_r).$$

En effet, les éléments de $T^1(M) = M$ sont les générateurs de l'algèbre $T(M)$ sur K . On voit que $T(f)$ est un homomorphisme d'algèbre. Nous pouvons déterminer complètement la structure de $T(M)$. Soit J_n le sous espace vectoriel de $T^n(M)$ engendré par les tenseurs purs $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ ayant au moins deux composantes $x_i = x_j$ égales. Noter au passage que $J_0 = J_1 = \{0\}$ (pas possible d'avoir deux composantes, a fortiori deux composantes égales). On pose

$$J = \bigoplus_{n \geq 0} J_n$$

Définition

On appelle algèbre extérieure de M l'algèbre quotient

$$\Lambda(M) = T(M) / J$$

On notera \wedge le produit dans $\Lambda(M)$, de sorte que

$$\overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_n} = m_1 \wedge \cdots \wedge m_n.$$

1) $\Lambda(M)$ est une algèbre engendrée par M

$$\Lambda^k(M) = T^k(M) / J = \{m_1 \wedge \cdots \wedge m_k\}_{m \in M} \cong T^k(M) / J_k$$

2) La projection canonique

$$\pi : \begin{cases} T(M) & \twoheadrightarrow & \Lambda(M) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_n & \longmapsto & m_1 \wedge \cdots \wedge m_n \end{cases}$$

est un morphisme qui injecte naturellement M dans $\Lambda(M)$:

$$M \hookrightarrow \Lambda(M)$$

Proposition

Pour tous x et y dans M , on a

$$y \wedge x = -x \wedge y$$

Corollaire

Soient x_1, \dots, x_n dans M , σ dans S_n .

Alors $x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) x_1 \wedge \dots \wedge x_n$

Corollaire

$\Lambda(M)$ est une algèbre alternée, i.e., si $x \in \Lambda(M)$, $x^2 = x \wedge x = 0$.

Proposition

Soient M, N deux espaces vectoriels et $u : M \longrightarrow N$ linéaire.

Proposition

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\Lambda(u) : \begin{cases} \Lambda(M) & \longrightarrow & \Lambda(N) \\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_n & \longmapsto & u(m_1) \wedge \cdots \wedge u(m_n) \end{cases}$$

et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda(M) & \xrightarrow{\Lambda(u)} & \Lambda(N) \end{array}$$

De plus, si $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$, alors

$$\Lambda(v \circ u) = \Lambda(v) \circ \Lambda(u)$$

Theorem

Soient M_1, \dots, M_n des K -espaces vectoriels.

On a un isomorphisme canonique d'algèbres :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Lambda (M_1 \oplus \dots \oplus M_n) & \xrightarrow{\sim} & \Lambda (M_1) \otimes \dots \otimes \Lambda (M_n) \\ m_i & \mapsto & 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \\ m_1 \cdots m_n & \longleftarrow & m_1 \otimes \dots \otimes m_n \end{array} \right.$$

Corollaire

Soit M un K -espace vectoriel de base $B = (e_1, \dots, e_n)$. Alors

$$(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k})_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}$$

est une base de $\Lambda^k(M)$ et

$$\dim \Lambda^k(M) = \binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En particulier,

$$\dim \Lambda^n K^n = 1 \text{ et } \dim \Lambda^k M = 0, \text{ si } k > n.$$

Proposition

On a un isomorphisme canonique des espaces vectoriels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}K_n(M, N) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\Lambda^n(M), N) \\ \varphi & \longmapsto & x_1 \wedge \dots \wedge x_n \mapsto_f \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Déterminant

Soit M un K -espace vectoriel de base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

On rappelle que $\dim \Lambda^n(M) = 1$.

En particulier, tout endomorphisme de $\mathcal{L}(\Lambda^n(M))$ est une homothétie.

Définition

On appelle déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(M)$ le rapport de l'homothétie $\Lambda^n(u)$, noté

$$\text{det } u \in K.$$

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(M)$ et $(a_{i,j})$ les coefficients de $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)} u$. Alors

$$\text{det } u = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Proposition

Soient $x_1, \dots, x_p \in M$ et $X \in M_{n,p}(K)$ la matrice des x_i dans la base (e_j) . Alors

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_p = \sum_{I \in B_p} \det(X_{I, \{1, \dots, p\}}) e_I.$$

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(M)$ de matrice $X = \text{Mat}_{(e_i)} u$. Alors la matrice de $\Lambda^k(u)$ dans la base $(e_I)_{I \in B_k}$ est

$$\text{Mat } \Lambda^k_{(e_I)_{I \in B_k}}(u) = (\det(X_{I,J}))_{I,J \in B_k}$$

Proposition

Pour $u \in \mathcal{L}(M)$ et $\lambda, \mu \in K$, on a

$$\begin{aligned} \det(\lambda Id + \mu u) &= \sum_{k=0}^n \operatorname{tr}(\Lambda^k(u)) \mu^k \lambda^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{I \in B_k} \det(X_{I,I}) \right) \mu^k \lambda^{n-k} \end{aligned}$$

Conclusion









Au terme de ce travail, nous pouvons dire que le produit tensoriel et extérieur

sont des notions d'algèbre multilinéaire nécessaire pour

des plusieurs branches mathématiques et physiques :

géométrie différentielle, théorie des codes, mécanique des milieux continus, fluides ou solides, en électromagnétisme, relativité générale

Bibliographie

-  **S. MARC**, Algèbre multilinéaire, Produit tensoriel de A -modules. (fichier internet).
-  **D. Harari**, Cours d'algèbre 1, fait à l'E.N.S. (première année du M.M.F.A.I.) en 2003-2004 et 2004-2005.
-  **S. LANG**, Algèbre, DUNOD, 3^e édition révisée.
-  **J.Qurré**, Cours D'algèbre, Université Bretagne Occidentale, 1976.
-  **J.C. Mado**, Cours d'Algèbre, 2002-2003.
-  **E.Vieillard-Baron. and all**, *Anneau et corps*, Janvier 2001.
-  **H. MATSUMURA**. Commutative Algebra. Benjamin-Cumming, New York, 1980. (Deuxième édition).
-  **R. Rolland**, Produit tensoriel d'espaces vectoriels, 1 janvier, 2012.

MERCI POUR VOTRE
ATTENTION